CIRPÉE
Centre interuniversitaire sur le risque, les politiques économiques et l'emploi

Cahier de recherche/Working Paper **06-39**

Les mesures multidimensionnelles de la pauvreté: une application sur l'Afrique du Sud et l'Égypte

Sami Bibi
Abdel-Rahmen El Lahga

Novembre/November 2006

Bibi: Réseau Politiques Économiques et Pauvreté (PEP), Centre Inter-universitaire sur le Risque, les Politiques Économiques et l'Emploi (CIRPÉE), Université Laval, Québec, Canada et Faculté des Sciences Économiques et de Gestion de Tunis, Tunisie
sami.bibi@ecn.ulaval.ca
El Lahga: Institut Supérieur de Gestion de Tunis, Tunisie
abdelrahmen.ellahga@gnet.tn

Nous remercions Jean-Yves Duclos, Lotfi Rabeh et Stephen Younger pour leurs commentaires pertinents.

Résumé: Il est souvent admis que la pauvreté est un phénomène multidimensionnel. Néanmoins, rares sont les travaux qui ont tenu compte des multiples facettes de la pauvreté dans un cadre unifié. Récemment, des nouvelles approches se sont développées dans le but de dériver des indices synthétiques des multiples facettes de la privation individuelle sous la forme de mesures multidimensionnelles de pauvreté. Toutefois, les fondements normatifs de ces mesures demeurent méconnus et peu discutés dans la littérature. La présente étude analyse de façon détaillée les fondements éthiques qui sous-tendent la procédure d'agrégation des multiples aspects de la pauvreté adoptée sous chacune de ces nouvelles approches. Elle offre également une application empirique des principales approches développées afin d'établir un classement complet et partiel de l'Afrique du Sud et l'Égypte en termes de pauvreté bi-dimensionnelle.

Mots Clés: Pauvreté multidimensionnelle, analyse de robustesse, Afrique du Sud, Égypte

Classification JEL: D31, D63, I32

1 Introduction

Il existe un large accord que la pauvreté est un phénomène multidimensionnel, faisant intervenir plusieurs handicaps monétaires et non-monétaires. A titre d'exemple, l'approche défendue par Streeten (1981) ne perçoit pas l'amélioration du bien-être comme étant uniquement le résultat d'une croissance soutenue du revenu réel des ménages mais, aussi, le résultat d'une amélioration dans la satisfaction d'un ensemble de besoins fondamentaux. Dans certains cas, il est vrai que l'augmentation du revenu facilite la satisfaction des besoins essentiels. Cela suppose, toutefois, la présence d'un marché pour chacun de ces besoins ; ce qui est loin d'être toujours le cas surtout dans les pays en développement. Par ailleurs, les études empiriques ont souvent révélées une faible corrélation entre le revenu et les autres dimensions du bien-être (Klassen (2000), Duclos et al. (2006)).

Etant donné la faible corrélation entre le revenu (ou la dépense totale) et les dimensions non-monétaires du bien-être due, par exemple, à l'incomplétude des marchés, la présence d'externalités et de biens publics, il n'est pas pertinent d'utiliser uniquement la distribution du revenu pour mesurer la pauvreté.[1] Dans ce contexte, Sen (1985, 1992) a suggéré de mesurer le bien-être et la pauvreté *directement* en observant "les performances" (Functionings) et "les capacités" (Capabilities) des individus. Le premier terme fait appel à ce qu'un individu peut réaliser avec les biens et les caractéristiques dont il dispose alors que le second indique la faculté de l'individu de choisir entre plusieurs types de "performances". Les indices de pauvreté doivent donc mesurer le manque de "capacité de performance" pour atteindre certains minima acceptables ; tels que l'incapacité d'être bien nourris, d'être en bonne santé, d'être bien éduquée, etc.

Toutefois, l'application de l'approche *directe* suggérée par Sen, nécessite la disponibilité des données individuelles sur plusieurs dimensions du bien-être, aussi bien monétaires que non-monétaires. Cette exigence a longtemps découragé les économistes à développer des mesures qui tiennent compte du caractère multidimensionnel de la pauvreté. Elle les a aussi amené à se contenter, jusqu'à une date récente, d'utiliser une approche monétaire, et donc *indirecte*, dès lors que l'observation *directe* des différentes dimensions du bien-être n'était pas possible. Néanmoins, depuis le début des années 90, les données sur des attributs autres que le revenu, sont de plus en plus disponibles. L'approche multidimensionnelle devient donc plus que jamais recommandée afin de mieux appréhender les per-

[1]Pour la simplicité de la présentation nous utilisons de façon interchangeable les termes "revenu" et "dépenses totales".

formances d'un pays donné en matière de lutte contre la pauvreté dans ses divers aspects.

Parallèlement au problème de disponibilité des données, les chercheurs ont été confrontés à un nouveau défi : comment les informations relatives aux multiples facettes de la privation individuelle peuvent-elles être agrégées pour produire une mesure globale de la pauvreté ? Faut-il construire, dans une étape, plusieurs mesures unidimensionnelles puis, dans une deuxième étape, les agrégées ensemble ? Faut-il, plutôt, commencer par mesurer la privation multidimensionnelle à l'échelle individuelle puis l'agréger à travers l'ensemble des individus ?

Pour résoudre le problème d'agrégation, deux principales approches ont été développées.[2] La première consiste à mesurer la privation totale de la société en termes de chaque attribut considéré séparément et, ensuite, d'agréger les différents indices unidimensionnels pour obtenir un indice multidimensionnel de la pauvreté. La mesure de pauvreté la plus connue issue de cette approche est *l'Indice de Pauvreté Humaine (IPH)* développé par Arnand et Sen (1997) pour le compte du PNUD. Eu égard à sa simplicité, l'*IPH* a acquis une large popularité auprès des décideurs public et a été appliqué depuis 1997 a plus de 100 pays.

La deuxième approche, par contre, consiste à mesurer, dans un premier temps, la privation individuelle en termes des différents attributs pour en construire un indicateur composite de la pauvreté pour chaque individu. L'agrégation de ces indicateurs à travers les individus, dans un deuxième temps, permet d'obtenir un indice multidimensionnel de pauvreté pour l'ensemble de la population. Bourguignon et Chakravarty (2002, 2003), Chakravarty et al. (1998) et Tsui (2002) sont à cet égard parmi les principaux fondateurs de cette approche. Notons toutefois que leurs mesures de pauvreté ne captent pas exactement le manque de "capacité de performance", comme le suggère Sen mais, plutôt, un manque de "performances".

Les fondements normatifs qui distinguent ces deux principales approches de la pauvreté multidimensionnelle demeurent, néanmoins, méconnus et peu discutés dans la littérature.[3] L'objectif de ce travail est donc de combler le besoin d'avoir une synthèse sur l'apport et le contenu éthique de chacune d'elle. Afin de simplifier l'exposé, nous mettons plus l'accent sur la deuxième approche que nous

[2]Pour plus de détails à propos des différentes procédures d'agrégation, voir Bibi (2005).

[3]Notons à ce propos, d'une part, l'excellent papier de Silber (2005) qui compare empiriquement plusieurs mesures multidimensionnelles de pauvreté basées sur les ensembles flous, les fonctions de distances, la théorie de l'information et l'approche axiomatique de Bourguignon et Chakravarty (2002) et de Tsui (2002). D'autre part, Atkinson (2003) n'a synthétisé, dans un cadre unifié, que l'apport de certaines contributions à cette littérature sans offrir des illustrations empiriques.

qualifions d'*axiomatique*. En effet, ses procédures d'agrégation sont *explicitement* déterminées en fonction des propriétés désirables que la mesure multidimensionnelle de pauvreté doit respecter. Même si cette procédure d'agrégation est plus conforme au cadre conceptuel de l'économie de bien-être, cela ne signifie pas que la première approche est dénuée de tout fondement axiomatique. Dans la mesure où ils sont assez souvent déduits *ex-post*, nous ne présentons pas de façon détaillée les différents axiomes qui sous-tendent la première approche. Nous précisons, par contre, à plusieurs endroits si telle propriété est respectée ou non par l'indice multidimensionnel pertinent issu de la première approche.

Comme dans le cas unidimensionnel, les classements ordinaux complets en termes de pauvreté multidimensionnelle exigent également la spécification de seuils et de mesures multidimensionnels de pauvreté, une procédure qui est souvent critiquable aussi bien sur le plan éthique qu'empirique. Les travaux récents de Bourguignon et Chakravarty (2002) et Duclos et al. (2006), s'inscrivant dans le cadre de la théorie de dominance stochastique, ont permis de déduire les conditions sous lesquelles les comparaisons ordinales de la pauvreté multidimensionnelle demeurent robustes face à des choix alternatifs de seuils et de mesures de pauvreté. Nous présentons les principaux résultats de cette littérature. Nous illustrons, également, les différentes techniques présentées par une comparaison de la pauvreté bi-dimensionnelle entre l'Egypte et l'Afrique du Sud en utilisant des données issues des enquêtes de niveau de vie des ménages de ces deux pays.

La suite du papier est organisée comme suit. La section 2 présente le cadre général d'analyse. La section 3 développe la méthodologie suivie pour la construction de *l'Indice de Pauvreté Humaine*. La section 4 expose le cadre théorique des mesures multidimensionnelles de pauvreté basées explicitement sur une approche axiomatique. Une application de ces différentes mesures aux cas de l'Afrique du Sud et de l'Egypte est proposée à la section 5. La section 6 conclut le travail.

2 Avant propos : le cadre général d'analyse

2.1 Notation

Considérons une population de n individus et un ensemble de k attributs $T_1, ..., T_k$. Soient $N = \{1, ..., n\}$ et $J = \{1, ..., k\}$. Pour tout $i \in N$ et $j \in J$, soient $x_{ij} \in \mathbb{R}_+$ la dotation de l'individu i en termes de l'attribut T_j, $z = (z_1, ... z_k)$ où $z_j \in \mathbb{R}_+$ le seuil minimum de l'attribut T_j qu'un individu devrait avoir pour ne pas être considéré pauvre selon cette dimension.

La matrice $X = (x_{ij})$ représente la distribution des k attributs pour l'ensemble des individus. Le vecteur ligne $x_i = (x_{i1}, \dots x_{ik})$ représente le profil de l'individu i en termes des k attributs, alors que le vecteur colonne $x^j = (x_{1j}, \dots x_{nj})$ représente la distribution de l'attribut j à travers la population.

2.2 Le problème

La question qui se pose est comment définir une mesure de pauvreté multidimensionnelle qui résume la privation de l'ensemble de la population en termes des différents attributs ?

Comme il a été signalé plus haut, la littérature économique suggère deux procédures différentes. La première consiste à mesurer, de façon séparée, la privation totale de la société en termes de chaque attribut T_j. Il en résulte une mesure de pauvreté unidimensionnelle, notée $p^j(x^j, z_j)$. L'agrégation des différents indices $p^j(x^j, z_j)$, selon une procédure appropriée $\Pi(.)$, permet d'obtenir un indice synthétique de la pauvreté.

Formellement, une mesure multidimensionnelle de pauvreté, notée $P(x, z)$, est donc définie par :

$$P(x, z) = \Pi(p^1(x^1, z_1), \dots,\ p^k(x^k, z_k)) \tag{1}$$

.

La deuxième procédure permettant de construire une mesure multidimensionnelle de pauvreté puise explicitement ses fondements du cadre conceptuel de l'économie de bien-être. Elle consiste à mesurer, dans un premier temps, la privation en termes des différents attributs pour chaque individu par la construction d'un indicateur composite de pauvreté. Dans un deuxième temps, l'agrégation de l'ensemble de ces indicateurs individuels permet d'obtenir un indice multidimensionnel de pauvreté pour l'ensemble de la population.

Formellement, une mesure de pauvreté multidimensionnelle est définie par

$$P(x, z) = F\left(\pi(x_1, z), \dots,\ \pi(x_n, z)\right) = F(p_1, \dots,\ p_n), \tag{2}$$

avec $\pi(x_i, z)$ représente une fonction définie de $\mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$. Elle indique la façon avec laquelle les multiples aspects de la pauvreté sont agrégées lors de l'élaboration de l'indicateur composite de la pauvreté individuelle p_i. $F(p_1, \dots p_n)$ est une fonction définie de $\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$. Elle renseigne plutôt sur la façon avec laquelle les indicateurs composites p_i sont agrégés pour aboutir à la mesure globale de la pauvreté $P(x, z)$.

Les formes explicites des fonctions $F(.)$ et $\pi(.)$ dépendent des propriétés désirables que devrait respecter la mesure de pauvreté $P(x, z)$ et qui seront discutées dans la section (4.1).

Contrairement à la deuxième procédure, l'usage de la première procédure est difficilement justifiable dans le cadre conceptuel de l'économie de bien-être. Son adoption pour mesurer la pauvreté dans une perspective multidimensionnelle repose sur une hypothèse d'ordre éthique qui stipule que la mesure multidimensionnelle de la pauvreté doit être basée sur l'agrégation des différentes mesure unidimensionnelle de pauvreté. Toutefois, elle présente l'avantage de la simplicité dès lors que sa mise en application ne requiert que des données agrégées facilement disponibles même dans les pays en développement.

Les deux procédures décrites plus haut donnent généralement des résultats différents. Dutta et al. (2003) ont montré que les deux procédures ne mènent à des résultats identiques que pour des formes fonctionnelles très restrictives des fonctions F et π.[4] En effet, la pauvreté individuelle doit être définie comme une moyenne pondérée de l'ensemble des privations de l'individu en termes de chaque attribut, ce qui se traduit formellement par une fonction

$$\pi(x_i, z) = \sum_{j=1}^{k} w_j t_{ij},$$

avec $\sum_{j=1}^{k} w_j = 1$, $w_j \in [0, 1]$ désigne la pondération associée à l'attribut T_j et t_{ij} est une mesure de la privation de l'individu i en terme de l'attribut T_j.[5] Cette forme de la fonction π est très restrictive dans la mesure où elle impose une parfaite substitution entre les différents attributs d'un individu et ce, indépendamment du niveau de ses dotations.

Quant à la pauvreté globale, elle doit être définie comme une simple moyenne des indicateurs composites de la pauvreté individuelle

$$F(p_1, ..., \ p_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Comme pour la fonction $\pi(.)$, la forme additive simple de $F(.)$ risque d'être contestable. En effet, elle sous-tend que la pauvreté globale demeure inchangée

[4] Voir Théorème 1 de Dutta et al. (2003 : page 202), pour plus de détails.

[5] Dutta et al. (2003) définissent $t_{ij} = \frac{z_j - x_{ij}}{z_j}$ si $z_j > x_{ij}$, 0 sinon. t_{ij} correspond donc à l'écart de pauvreté normalisé de l'individu i en termes de l'attribut T_j.

suite à un transfert (régressif) de bien-être d'un individu très pauvre à un autre moins pauvre.[6] Cela va à l'encontre d'un principe éthique, fortement défendu dans la littérature du bien-être et de la pauvreté, stipulant qu'un accroissement des inégalités au sein d'un segment donné de la population doit, toute chose étant égale par ailleurs, réduire son niveau de bien-être (Kolm (1979), Atkinson et Bourguignon (1982)).

Malgré les principes éthiques divergents que peuvent sous-tendre les deux procédures d'agrégation, nous pouvons les considérer comme deux voies d'analyse complémentaires de la pauvreté multidimensionnelle. Dans la section 3, nous présentons l'*Indice de Pauvreté Humaine* qui se situe dans le cadre de la première procédure. Quant à la section 4, elle sera consacrée aux mesures de pauvreté basées sur la seconde procédure.

3 L'indice de la pauvreté humaine IPH

Dans son rapport sur le développement humain publié en 1997, le Programme des Nations Unies pour le Développement (PNUD) reprend l'argument de la multidimensionnalité du phénomène de la pauvreté. Il avance que le manque de revenu ne reflète qu'une image partielle de ses multiples causes qui agissent sur le niveau de bien-être des individus (avoir une longue vie, être en bonne santé, bien nourri, bien éduqué, bien intégré dans la société, etc.). Il serait donc indiqué selon le PNUD de proposer une nouvelle mesure de pauvreté qui prend en compte d'autres indicateurs de bien-être, notamment :

1. Un indicateur qui renseigne sur la privation de vivre longtemps. Celui-ci, noté IPH_1, est donné par le pourcentage des individus ayant une espérance de vie inférieure à 40 ans.
2. Une mesure qui synthétise les problèmes liés à l'accès à l'éducation et à la communication. A cette fin, le pourcentage de la population adulte illettrée, noté IPH_2, est l'indicateur approprié.
3. Un indice composite résumant un aspect matériel du niveau du bien-être, noté IPH_3. Cet indice s'obtient en calculant la moyenne arithmétique de trois indicateurs à savoir : le pourcentage de la population ayant accès aux

[6] Il va de soi que ce transfert doit être suffisamment faible pour que le bénéficiaire continue d'être pauvre.

services de santé (noté $IPH_{3,1}$), à l'eau potable (noté $IPH_{3,2}$), et le pourcentage des enfants âgés de moins de 5 ans souffrant de la malnutrition (noté $IPH_{3,3}$).

L'indice de pauvreté proposé a été élaboré par Arnand et Sen (1997). Il prend la forme suivante :

$$IPH = (w_1 IPH_1^\theta + w_2 IPH_2^\theta + w_3 IPH_3^\theta)^{\frac{1}{\theta}}, \tag{3}$$

avec $w_1 + w_2 + w_3 = 1$ et $\theta \geq 1.$

En termes de la définition générale d'une mesure de pauvreté donnée par l'équation (1), la mesure de pauvreté multidimensionnelle IPH retient les formes fonctionnelle suivantes pour $\Pi(.)$ et $p^j(.)$:

$$p^j(x^j, z_j) = n^{-1} \sum_i x_{ij} = IPH_j,$$

avec x_{ij} est une variable indicatrice qui prend la valeur de 1 si la dotation de l'individu i en termes de l'attribut T_j est supérieure au seuil z_j, 0 sinon. A titre d'exemple, le seuil z_1 de l'attribut âge T_1 vaut 40 ans. La fonction $\Pi(.)$ qui correspond la définition de l'IPH donnée en (3) est :

$$\Pi(IPH_1, IPH_2, IPH_3) = (\sum_{j=1}^{3} w_j IPH_j^\theta)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Pour $\theta = 1$, les trois composantes de l'IPH sont parfaitement substituables. Par contre, lorsque θ tend vers l'infini, cet indice tendra vers la valeur maximale de ses trois composantes : $Max.(IPH_1, IPH_2, IPH_3)$. Dans ce cas, l'$IPH$ ne baisse que si sa composante la plus élevée diminue. Ces deux cas extrêmes sont donc difficiles à défendre. Une valeur intermédiaire est donc préconisée lors des comparaisons ordinales de pauvreté.[7]

Bien qu'il permet de synthétiser plusieurs indicateurs de bien-être en une seule mesure, l'indice IPH été sujet à plusieurs critiques. A titre illustratif, *l'indice de pauvreté humaine* laisse de côté la dimension monétaire de la pauvreté. Celle-ci est au moins aussi importante que les dimensions captées par l'IPH. Par ailleurs, cet indice ne tient pas compte de la corrélation qui peut exister entre ses trois composantes. Ainsi, un individu illettré ayant une espérance de vie inférieure à 40 ans

[7] Collicelli et Valerii (2001) ont confronté les résultats donnés par cet indice à ceux donnés par l'incidence monétaire de la pauvreté. Les résultats de cette confrontation montre que certains pays ont effectivement une faible incidence de pauvreté monétaire mais un fort indice IPH.

sera doublement comptabilisé. Enfin, les comparaisons ordinales de pauvreté vont être très sensible aux choix (arbitraires) des w_i. Une démarche alternative consiste à expliciter au préalable les fondements normatifs qui déterminent le mode d'agrégation des attributs sélectionnés. C'est vers le développement de cette démarche que nous nous tournons maintenant.

4 Les mesures multidimensionnelles de la pauvreté : Une approche axiomatique

Mesurer la pauvreté soulève toujours des problèmes d'ordre éthique. Cette mesure doit-elle rendre compte de la situation des individus pauvres selon tous les attributs simultanément ou bien faut-il qu'elle tienne compte également de la privation de ceux qui n'arrivent pas à atteindre le minimum requis pour un attribut seulement ? La réponse est loin d'être évidente. La littérature distingue les classes de mesures basées sur l'*union* des privations individuelles de celles basées sur *l'intersection* de ces privations. La première classe, que nous notons $\mathcal{C}_1$, considère qu'un individu est pauvre s'il n'arrive pas à satisfaire au moins l'un de ses besoins fondamentaux. Selon ce point de vue la fonction $\pi(x_i, z)$ devrait s'écrire ainsi :

$$\pi(x_i, z) \begin{cases} = 0, & \text{si } x_{i,j} \geq z_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k, \\ > 0, & \text{sinon,} \end{cases} .$$

La deuxième classe de mesures, notée $\mathcal{C}_2$, basée sur *l'intersection* des privations individuelles, considère qu'un individu n'est pauvre que s'il n'arrive à satisfaire aucun de ses besoins fondamentaux. La fonction $\pi(x_i, z)$ s'écrira comme :

$$\pi(x_i, z) \begin{cases} > 0, & \text{si } x_{i,j} < z_j, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k, \\ = 0, & \text{sinon,} \end{cases} .$$

Il est clair que la diversité d'opinions provient du fait que la pauvreté n'est pas un concept objectif. Il s'agit plutôt d'un concept complexe dont l'analyse normative peut être facilitée par l'adoption d'une démarche axiomatique (section 4.1). Celle-ci, bien qu'elle permette de délimiter le concept de la pauvreté, elle rend plus difficile l'obtention d'un consensus autour des résultats de l'analyse. Ce problème peut être résolu en ayant recours à l'analyse de dominance stochastique (section 4.2).

4.1 Les principaux axiomes et les mesures qui en résultent

La démarche axiomatique permet de mettre en exergue les propriétés (axiomes) désirables qu'un indice de pauvreté doit respecter. Les propriété de $F(.)$ et $\pi(.)$ seront, donc, *explicitement* fonction des axiomes qu'il serait indiqué que la mesure de pauvreté ne viole pas. Certains axiomes relatifs aux mesures multidimensionnelles de pauvreté développés dans la littérature sont nouveaux mais plusieurs sont simplement une généralisation de ceux inhérents à la construction d'une mesure unidimensionnelle de pauvreté.

Étant donné la difficulté d'avoir des données précises sur les besoins fondamentaux, il est raisonnable d'exiger qu'une mesure de pauvreté soit continue par rapport aux besoins de base. Cela évite que des faibles erreurs de mesure engendrent des changements brutaux des comparaisons de la pauvreté. L'axiome qui suit répond à ce besoin :

Axiome 1 ***La continuité*** *: La mesure de pauvreté ne doit pas être très sensible à une variation marginale de la quantité d'un attribut.*

L'identité des individus, ou autre indicateur non pertinent pour l'analyse de la pauvreté, ne doit avoir aucune influence sur les résultats d'analyse. En d'autres termes une permutation des attributs parmi les individus ne change pas la mesure de la pauvreté. Ce principe est résumé par la propriété suivante :

Axiome 2 ***La symétrie ou l'anonymat*** *:* $P(X, z) = P(\Xi X, z)$*, où* $\Xi \, (n \times n)$ *est une matrice de permutation.*[8]

Les mesures de pauvreté ne doivent pas rendre compte de l'amélioration du bien-être des individus non-pauvres. Ce principe est résumé par :

Axiome 3 ***La concentration*** *: La mesure de pauvreté reste inchangée si un attribut* j *augmente pour un individu* i *caractérisé par* $x_{i,j} \geq z_j$*.*

L'axiome de *concentration* implique, dans un certain sens, la non substituabilité entre les différents attributs. Pour illustrer cette idée, considérons deux attributs tels que, par exemple, le revenu comme premier attribut et l'éducation comme deuxième. Supposons que le vecteur des seuils de pauvreté soit donné par $z = (8, 6)$. Soit $x_i = (5, 7)$ le vecteur des attributs d'un individu i. En dépit de son

[8]Une matrice de permutation est une matrice carré, composée de 0 et 1, et dont la somme de chacune de ses lignes et colonnes est égale à 1.

niveau d'éducation qui est supérieur au minimum requis ($x_{i,2} > z_2$), cet individu est pauvre selon la classe $\mathcal{C}_1$ car son revenu est inférieur au seuil de pauvreté monétaire ($x_{i,1} < z_1$).[9] L'axiome de *concentration* stipule que l'amélioration du niveau d'éducation de i ne réduit pas son indicateur composite de pauvreté.

Formellement, l'axiome de *concentration* exige que :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_{i,j}} = 0 \text{ si } x_{i,j} \geq z_j. \tag{4}$$

Une conséquence directe de la condition (4) est que les courbes d'iso-pauvreté d'un pauvre deviennent parallèles à l'axe de l'attribut j lorsque $x_{i,j} \geq z_j$.[10]

Par contre, il est souhaitable qu'une mesure de pauvreté rende compte de l'amélioration de bien-être des individus pauvres comme le recommande l'axiome suivant :

Axiome 4 ***La monotonicité*** *: La mesure de pauvreté diminue, ou ne doit pas augmenter, suite à une amélioration dans l'un des attributs d'un pauvre.*

Dès lors, les courbes d'iso-pauvreté ne doivent pas être croissantes, i.e.

$$\frac{\partial \pi(x_i, z)}{\partial x_{i,j}} \leq 0 \text{ si } x_{i,j} < z_j. \tag{5}$$

Quoiqu'ils respectent les principes de la *symétrie* et de la *concentration*, les indices mesurant l'incidence multidimensionnelle de la pauvreté et l'indice *IPH* ne respectent pas l'axiome de la *monotonicité*. A titre d'exemple, si l'espérance de vie d'un groupe d'individu augmente de 29 à 39 ans, i.e. sans que l'espérance de vie dépasse le seuil de 40 ans, la valeur de l'IPH_1, et donc de l'IPH, ne change pas ; pendant que la privation de vivre longtemps a sensiblement diminué.

Généralement, les comparaisons ordinales de pauvreté sont faites entre populations de taille différente d'où la nécessité que les mesures de pauvreté soient insensibles à la taille de la population. En d'autres termes, si la matrice des attributs est répliquée r fois, la pauvreté globale demeure inchangée. Formellement :[11]

[9]Par contre, selon la classe $\mathcal{C}_2$, cet individu n'est pas pauvre dans la mesure où il n'est pas dans une situation de dénuement selon les deux attributs simultanément.

[10]Une courbe d'iso-pauvreté indique les différents vecteurs x_i qui donnent le même niveau de pauvreté individuel, i.e. $\pi(x_i, z) = \overline{\pi}$.

[11]Cet axiome a été introduit pour l'analyse de la pauvreté par Chakravarty (1983) et Thon (1983). L'une de ses conséquences est que la mesure de pauvreté décroît à mesure que la taille de la population non-pauvre croît. Dès lors, l'axiome de *concentration* impose à la mesure de pauvreté d'être indépendante de la distribution des attributs des non-pauvres et *le principe de population* impose une relation décroissante entre la taille de cette population et la mesure de pauvreté.

Axiome 5 ***Le Principe de la Population*** *:* $P(X,z) = P(X^r, z)$ *où* X^r *est la* $r^{\text{ième}}$ *réplique de* X.

Pareillement, les différents pays pouvant faire l'objet d'une comparaison ordinale de pauvreté peuvent utiliser des unités de mesures différentes. Il est donc indiqué qu'un indice de pauvreté soit indépendant des unités de mesure. Par exemple, utiliser des Dollars ou des Euros pour mesurer le revenu ne doit avoir aucun effet sur les indices de pauvreté. L'axiome suivant, qui impose l'homogénéité de degré 0 par rapport à X et z des mesures de pauvreté, est adapté à ce besoin :

Axiome 6 ***L'invariance aux variations d'échelle*** *:* $P(tX, tz) = P(X, z)$ *où* t *est un réel.*

A partir de cet axiome, il est clair que la fonction de pauvreté individuelle doit vérifier l'égalité suivante :

$$\pi(x_i, z) = \pi(\frac{x_{i,1}}{z_1}, ..., \frac{x_{i,j}}{z_j}, ..., \frac{x_{i,k}}{z_k}). \tag{6}$$

Comme dans les mesures unidimensionnelles, il est souhaitable qu'une mesure multidimensionnelle de pauvreté soit sensible au niveau du bien-être des différents segments de la population présentant des caractéristiques homogènes, tels que l'âge, le genre, le lieu de résidence, etc. L'axiome suivant précise cette propriété lorsque nous supposons que la population totale peut être décomposée en deux sous-groupes (disons a et b) :

Axiome 7 ***La monotonicité par sous-groupe*** *: soit* $X \begin{bmatrix} X^a \\ X^b \end{bmatrix}$ *et* $Y \begin{bmatrix} Y^a \\ Y^b \end{bmatrix}$ *avec* X^a *et* Y^a *(*X^b *et* Y^b*) sont des matrices* $n^a \times k$ *(*$n^b \times k$*). Si* $P(X^a, z) > P(Y^a, z)$ *pendant que* $P(X^b, z) = P(Y^b, z)$*, alors :*

$$P(X,z) > P(Y,z)$$

Une mesure multidimensionnelle de pauvreté respecte l'axiome précédent si elle peut être formulée comme suit :

$$P(X,z) = F\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\pi(x_i, z)\right). \tag{7}$$

Dans le cas où $F(.)$ est additive, alors la mesure de pauvreté $P(X,z)$ respecte également l'axiome de la *décomposabilité par sous-groupe* :

Axiome 8 ***La décomposabilité par sous-groupe*** *: La pauvreté globale est une moyenne pondérée des niveaux de pauvreté au sein de chaque sous-groupe :*

$$P(X, z) = \sum_{s=1}^{S} \frac{n_s}{n} P(X^s, z).$$

Les mesures de pauvreté qui respectent la *décomposabilité par sous-groupe* permettent d'évaluer la contribution de chaque segment de la population à la pauvreté globale. Cela facilite l'identification des groupes sociaux les plus vulnérables ce qui est extrêmement utile pour l'amélioration de l'efficacité des programmes de lutte contre la pauvreté.

Quoique nécessaire, l'identification des segments de la population les moins nantis n'est pas suffisante pour la conception des programmes sociaux spécifiques aux besoins de chaque groupe de la population . A titre d'exemple, si la *décomposabilité par sous-groupe* nous informe que les ménages ruraux du sud-ouest d'un pays *A* forment le groupe de la population le plus indigent, mais que les contraintes budgétaires ne permettent pas de combler leur déficit de pauvreté $(z_j - x_{i,j})$ à travers tous les attributs, il utile de savoir à travers quel attribut il faut concentrer les fonds disponibles.

Dans le but de répondre à ce besoin, Chakravarty et al. (1998) proposent, en plus de *la décomposabilité par sous-groupe* de la population, la *décomposabilité par attribut* :

Axiome 9 ***La décomposabilité par attribut*** *: La pauvreté globale est une moyenne pondérée des niveaux de pauvreté par attribut.*

Selon Chakravarty et al. (1998), les indices de pauvreté qui respectent les axiomes (8) et (9) facilitent la conception des programmes non dispendieux et efficaces de lutte contre la pauvreté. Ils sont donc surtout utile lorsque les contraintes financières empêchent un pays d'éliminer la pauvreté de tout un segment de la population ou selon un attribut spécifique. Si la double *décomposabilité* est retenue, alors les mesures de pauvreté multidimensionnelle prendrons la forme suivante :

$$P(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \pi_j(x_{i,j}, z_j) \tag{8}$$

et la condition suivante sera automatiquement observée :

$$\frac{\partial^2 \pi(x_i, z)}{\partial x_{ij} \partial x_{i,j}} = 0 \tag{9}$$

Dans le cas où $\pi(x_i, z_j)$ prend l'une des deux formes suivantes :

$$\pi(x_i, z) = \sum_{j=1}^{k} a_j \left(\frac{z_j - x_{i,j}}{z_j} \right)^{\alpha}, \tag{a}$$

ou,

$$\pi(x_i, z) = \sum_{j=1}^{k} a_j \ln \left(\frac{z_j}{\min(x_{i,j}, z_j)} \right) \tag{b}$$

nous obtenons une extension multidimensionnelle de la classe de mesures de pauvreté FGT de Foster-Greer-Thorbecke (1984) proposée par Chakravarty et al. (1998), dans le premier cas, et de Watts (1968), dans le second cas. L'intérêt de ces deux extensions possibles est qu'ils respectent tous les axiomes précédents. Par contre, l'extension multiplicative suivante de la classe FGT :

$$\pi(x_i, z) = \prod_{j=1}^{j} \left(\frac{z_j - x_{i,j}}{z_j} \right)^{\alpha_j}, \tag{c}$$

où α_j est un paramètre qui reflète l'aversion à la pauvreté selon l'attribut j,[12] ne respecte pas la *décomposabilité par facteur*. Par ailleurs, la pauvreté est dans ce dernier cas mesurée à travers l'*intersection* des diverses dimensions de la privation humaine.

La *décomposabilité par attribut* engendre nécessairement des mesures de pauvreté basées sur l'*union* des différentes dimensions de la pauvreté. La réciproque n'est pas toujours vraie. A titre d'exemple, l'indice de Tsui (2002), quoiqu'il soit basée sur l'*union* des diverses dimensions de la pauvreté, n'est pas conforme à la

[12]Lors de l'agrégation des $\pi(x_i, z)$ à travers les individus, plus la valeur assignée au paramètre α_j est importante, plus le poids attribué à la souffrance des plus pauvres (caractérisés par des valeurs élevées de $z_j - x_{i,j}$) est important.

décomposabilité par facteur :[13]

$$\pi(x_i, z) = \prod_{j=1}^{j} \left(\frac{z_j}{\min .(x_{i,j}, z_j)} \right)^{\beta_j} - 1. \tag{d}$$

Sen (1976) avait suggéré que les mesures de pauvreté soient sensibles à l'inégalité au sein de la population pauvre. En d'autres termes, un transfert à la Dalton d'un moins pauvre à un plus pauvre doit réduire l'indice de pauvreté.[14] Pour une mesure multidimensionnelle de pauvreté, Tsui (2002) a introduit l'axiome suivant :

Axiome 10 ***Le transfert*** *: La pauvreté n'augmente pas avec la matrice Y si cette dernière est obtenue à partir de la matrice X simplement en redistribuant les attributs des pauvres selon une matrice de transformation (et non de permutation) bi-stochastique.*[15]

Intuitivement, une distribution décrite par la matrice Y est plus égalitaire que celle décrite par X lorsque des solutions extrêmes sont remplacées par des solutions moyennes. A titre d'exemple, soit deux attributs tels que $z_1 = 8$ et $z_2 = 6$. Supposons que la distribution initiale X est caractérisée par $x_1(2, 4)$ et $x_2(6, 2)$. Si la distribution Y est obtenue à partir de X à l'aide d'une matrice bi-stochastique B dont tous les éléments sont égaux à 0.5 ($Y = BX$), alors les deux individus auront respectivement $y_1(4, 3)$ et $y_2(4, 3)$. Il est clair que la distribution Y est plus égalitaire que X. Ceci explique pourquoi elle doit contenir moins de pauvreté. Cette propriété implique donc que les courbes d'iso-pauvreté sont convexes, ou encore que :

$$\frac{\partial^2 \pi(x_i, z)}{\partial x_{ij} \partial x_{i,j}} \geq 0, \forall x_{i,j} < z_j. \tag{10}$$

[13]Il s'agit d'une extension multidimensionnelle de la mesure de Chakravarty (1983). En dehors de la *décomposabilité par facteur*, cette mesure respecte tous les axiomes développés jusqu'à maintenant.

[14]Ceci correspond au principe d'égalité verticale. Celui-ci stipule de traiter de façon inégale les individus inégaux. Il existe aussi un autre principe d'égalité. Il s'agit du principe d'équité horizontale introduit dans la littérature de la pauvreté unidimensionnelle par Bibi et Duclos (2006). Ce principe recommande de traiter de façon égale les individus égaux. Dès lors, un transfert d'un premier individu pauvre à un deuxième individu ayant exactement les mêmes dotations que le premier doit accroître la pauvreté.

[15]Les éléments d'une matrice de transformation bi-stochastique sont compris entre 0 et 1. La somme des éléments de chaque ligne (colonne) de cette matrice est égale à 1.

Nous pouvons vérifier que l'axiome de *transfert* est respecté par l'extension multidimensionnelle de la mesure de Watts (1968), la version multidimensionnelle de la classe de mesures FGT avec $\alpha > 1$, les mesures de Tsui (2002) pour $\beta_j > 0$, mais pas par l'*indice de la pauvreté humaine*.[16]

Il existe, toutefois, une autre forme de transfert inéquitable et qui n'est pas couverte par les développements précédents. Supposons que $k = 2$, $z_1 = 8$ et $z_2 = 6$ (z_1 minimum requis de revenu et z_2 minimum requis d'éducation). Soit $x_1(1, 2)$, $x_2(5, 3)$ et $x_3(2, 7)$. Supposons qu'à la suite d'un transfert de revenu du deuxième au troisième individu nous aurons $y_1(1, 2)$, $y_2(2, 3)$ et $y_3(5, 7)$. La corrélation entre les attributs augmente suite à ce transfert, i.e. une personne qui a plus d'un attribut a également plus de l'autre attribut. Intuitivement, la pauvreté doit augmenter ou, au moins, elle ne doit pas diminuer après ce type de transfert.[17] L'axiome suivant, proposé par Tsui (2002), impose aux mesures de pauvreté de ne pas décroître suite à ce type de transfert :

Axiome 11 ***La non décroissance de la pauvreté suite à un accroissement de la corrélation entre les attributs*** *: Supposons que Y est obtenu à partir de X à partir d'une série de transferts au sein de la population pauvre. Supposons que ces transferts augmentent la corrélation entre les attributs mais ne font sortir aucun individu de la pauvreté. Alors :*

$$P(Y, z) \geq P(X, z)$$

Bourguignon et Chakravarty (2003) ont remarqué que cet axiome est valable pour les attributs *substituables*. La *substituabilité* doit être comprise ici dans le sens de la proximité de la nature des attributs. Dès lors, si nous admettons dans l'exemple précédent que le revenu et l'éducation sont deux attributs de même nature, la pauvreté de l'individu 3 ne diminue pas de façon importante lorsque son revenu augmente car il a un bon niveau d'éducation. Elle aurait diminué de façon plus importante s'il était moins éduqué. En tous cas, la diminution attendue de la pauvreté de l'individu 3 ne doit pas compenser l'accroissement de la pauvreté de l'individu 2 dont le revenu a baisser au moment où son niveau d'éducation est faible. Analytiquement, lorsque les attributs sont substituables, nous avons :

$$\frac{\partial^2 \pi(x_i, z)}{\partial x_{ij} \partial x_{i,k}} \geq 0, \forall x_{i,j} < z_j. \tag{11}$$

[16] De façon générale, l'*IPH* ne respecte pas les propriétés qui font appel à une amélioration marginale du bien-être de la population cible ou à un transfert marginal intra-pauvres.

[17] Atkinson et Bourguignon (1982) ont suggéré qu'une mesure de bien-être social ne doit pas augmenter suite à ce type de transfert.

Force est de constater que la pauvreté mesurée par des indices doublement décomposables restera inchangée suite à un transfert qui augmente la corrélation entre les attributs. Dès lors, ce dernier axiome sera toujours (faiblement) respecté avec ce type de mesures. La mesure de pauvreté de Tsui (2002) augmentera nécessairement si $\beta_j \beta_k > 0$.

Lorsque les deux attributs sont, toutefois, considérés *complémentaire*, la baisse de la pauvreté de l'individu 3 permet au moins de compenser l'accroissement de la pauvreté de l'individu 2. Autrement dit, lorsque le revenu et l'éducation sont considérés *complémentaires*, il est socialement plus avantageux d'avoir des individus bien éduqués avec un revenu élevé que d'avoir des individus bien éduqués avec un niveau de revenu faible ou des individus peu éduqués avec un niveau de revenu élevé. Dans le dernier cas, un transfert de revenu (d'éducation) des moins éduqués aux plus éduqués (des moins aisés aux plus aisés) réduit la pauvreté multidimensionnelle. L'axiome suivant, introduit par Bourguignon et Chakravarty (2003), généralise l'axiome précédent :

Axiome 12 *La non décroissance (non croissance) de la pauvreté suite à un accroissement de la corrélation entre les attributs tient lorsque les attributs sont substituables (complémentaires).*

Analytiquement, lorsque les attributs sont complémentaires, nous avons :

$$\frac{\partial^2 \pi(x_i, z)}{\partial x_{ij} \partial x_{i,k}} \leq 0, \forall x_{i,j} < z_j. \tag{12}$$

Bourguignon et Chakravarty (2003) proposent une extension de la classe de mesures FGT qui, en plus de respecter tous les axiomes développés plus haut, autorise aussi bien la *substituabilité* que la *complémentarité* des attributs :[18]

$$P_{\alpha,\gamma}(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{z_1 - x_{i,1}}{z_1} \right)^{\gamma} + b^{\frac{\gamma}{\alpha}} \left(\frac{z_2 - x_{i,2}}{z_2} \right)^{\gamma} \right]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \tag{13}$$

avec $\alpha \geq 1$, $\gamma \geq 1$, et $b > 0$. Le fait que $\alpha \geq 1$ assure le respect du principe de *transfert* pour les individus pauvres selon un seul attribut. Pour $\alpha \geq 1$, $\gamma \geq 1$ garantit le respect de ce principe pour les individus pauvres selon les deux attributs simultanément. Par ailleurs, à mesure que la valeur de γ croît, la courbe d'iso-pauvreté devient plus convexe. L'élasticité de substitution entre les deux déficits de pauvreté est $\frac{1}{\gamma-1}$. La valeur (positive) de b révèle l'importance relative accordée

[18] Pour une raison didactique évidente, nous avons considéré le cas où $k = 2$.

au deuxième attribut par rapport au premier. Pour $\alpha \geq \gamma \geq 1$, les deux attributs sont *substituables* et la mesure $P_{\sigma,\gamma}(X, z)$ respecte l'axiome de la *non décroissance de la pauvreté suite à un accroissement de la corrélation entre les attributs*. Par contre, pour $\gamma \geq \alpha$, les deux attributs deviennent *complémentaires* et la mesure $P_{\alpha,\gamma}(X, z)$ satisfait la condition de la *non croissance de la pauvreté suite à un accroissement de la corrélation entre les attributs*. Pour $\gamma = 1$, les courbes d'iso-pauvreté sont linéaires pour les individus pauvres selon les deux attributs. Enfin, à mesure que la valeur de γ devient de plus en plus grande, la mesure $P_{\alpha,\infty}(X, z)$ s'écrit comme suit :

$$P_{\alpha,\infty}(X, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \min \left(1, \frac{x_{i,1}}{z_1}, \frac{x_{i,2}}{z_2} \right) \right]^{\alpha}, \qquad (14)$$

dans ce cas, les deux attributs sont *complémentaires* et nous obtenons des courbes d'iso-pauvreté à la Leontief.

4.2 Analyse de robustesse

Dans la mesure où les comparaisons ordinales de la pauvreté risquent d'être mitigées suite à un choix alternatif de z ou de $P(X, z)$, l'approche de dominance stochastique cherche à fournir les conditions nécessaires pour que ces comparaisons restent valables à l'intérieur d'un intervalle plausible de variation de z et pour une famille de mesures de pauvreté. Pendant que la littérature traitant les problèmes de dominance dans un contexte unidimensionnel est bien développée,[19] les recherches dans une perspective multidimensionnelle sont toujours en quête de maturation et demeure donc une voie de recherche importante à explorer.

Bourguignon et Chakravarty (2002) ont cherché à établir les conditions de la robustesse d'un classement ordinal obtenu, étant donné X et z, sous l'hypothèse que la limite supérieure des seuils de pauvreté pour chaque attribut reste fixe. Ils ont également supposé que la mesure de pauvreté respecte l'axiome de *concentration*, de *symétrie*, de la *population*, et de la *décomposabilité par sous-groupe*.

Pour $k = 2$, la distribution des attributs $x_i(x_{i,1}, x_{i,2})$ est remplacée par la fonction de distribution cumulée $H(x_1, x_2)$ définie sur $[0, z_1^*] \times [0, z_2^*]$. L'objectif est de comparer deux distributions, H et H^*. Etant donné l'axiome de *décomposabilité par sous-groupe*, la pauvreté associée à la distribution H peut s'écrire comme

[19]Voir, par exemple, Atkinson (1987), Foster et Shorroks (1988), et Jenkins et Lambert (1997).

suit :

$$P(H,z) = \int_0^{z_1^*} \int_0^{z_2^*} \pi_z(x_1,x_2) dH, \tag{15}$$

où $\pi_z(x_1,x_2)$ est le niveau de pauvreté associé à un individu ayant (x_1,x_2) comme attributs. La différence de pauvreté entre H et H^* est définie par :

$$\Delta P(z) = \int_0^{z_1^*} \int_0^{z_2^*} \pi_z(x_1,x_2) d\Delta H, \tag{16}$$

où $\Delta H = H(x_1,x_2) - H^*(x_1,x_2)$. La distribution H domine (faiblement) H^* lorsque $\Delta P(z)$ est négative (non positive) pour toute $\pi_z(x_1,x_2)$ appartenant à une classe de mesures donnée, $P(.)$.

Bourguignon et Chakravarty (2002) considèrent des familles de mesures multidimensionnelles de pauvreté qui respectent l'axiome de *monotonicité*. Ils distinguent les classes de mesures avec deux attributs *substituables*, *complémentaires*, ou *indépendants*. Ils démontrent que la *substituabilité* des attributs est associée à l'*intersection* des multiples dimensions de la pauvreté pendant que la *complémentarité* est liée à l'*union* de ces derniers. Plus précisément,

– Lorsque les deux attributs sont *substituables*, i.e. $\frac{\partial^2 \pi_z(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} > 0$, la dominance stochastique exige la dominance de premier ordre dans chaque dimension de la pauvreté :

$$\Delta P(x_j) = \int_0^{x_j} d\Delta H_{u_j}(u_j) \leq 0, \forall x_j \leq z_j^* \tag{17}$$

et la dominance de premier ordre à travers l'*intersection* des deux dimensions de la pauvreté :

$$\Delta P(x) = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} d\Delta H(u_1,u_2), \forall x_j \leq z_j^*. \tag{18}$$

– Lorsque les deux attributs sont *complémentaires*, i.e. $\frac{\partial^2 \pi_z(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} < 0$, la dominance stochastique exige aussi la condition de robustesse d'ordre 1 dans chaque dimension de la pauvreté, équation (17). Elle exige, en outre, la dominance de premier ordre à travers l'*union* des deux dimensions de la pauvreté :

$$\Delta P(x) = \sum_{j=1}^{j=2} \int_0^{x_j} \Delta H_{u_j}(u_j) du_j - \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} d\Delta H(u_1,u_2) \leq 0, \forall x_j \leq z_j^*. \tag{19}$$

– Lorsque les deux attributs sont *indépendants*, i.e. $\frac{\partial^2 \pi_z(x_1,x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$, les mesures de pauvreté sélectionnées sont *doublement décomposables*. La dominance stochastique exige simplement la condition décrite par l'équation (17).

Dans la mesure où il est souhaitable que les mesures de pauvreté respectent en plus l'axiome de *transfert*, il n'est pas tout à fait clair que les résultats de la dominance stochastique de deuxième ordre puissent être utilisés de façon analogue. L'analyse de dominance stochastique de deuxième ordre exige, selon Bourguignon et Chakravarty (2002), d'imposer des restrictions sur le signe des dérivées secondes et troisièmes de la fonction de pauvreté. L'interprétation de ces restrictions n'est pas très claire dans le contexte de la pauvreté multidimensionnelle. Néanmoins, si les mesures choisies sont décomposables aussi bien par attribut que par sous-groupe de la population, les auteurs démontrent que la robustesse d'ordre 2 nécessite simplement que :

$$\Delta P(x_j) = \int_0^{x_j} \Delta H_{u_j}(u_j) du_j \leq 0, \forall x_j \leq z_j^*,$$

autrement dit, il faut que la dominance de deuxième ordre [au sens d'Atkinson (1987) ou Foster et Shorroks (1988)] soit observée au niveau de chaque attribut pour tout $x_j \leq z_j^*$.

Duclos et al. (2006) ont établi des conditions de robustesse qui n'exigent pas des conditions restrictives relatives à l'intervalle de variation des différents z_j. Ils ont défini un indicateur de bien-être individuel :

$$\lambda(x_1, x_2) : \Re^2 \to \Re \left| \frac{\partial \lambda(x_1, x_2)}{\partial x_1} \geq 0, \frac{\partial \lambda(x_1, x_2)}{\partial x_2} \geq 0. \right. \tag{20}$$

Duclos et al. (2006) supposent qu'une frontière inconnue sépare la population pauvre de celle non pauvre. Cette frontière est implicitement définie par $\lambda(x_1, x_2) = 0$. L'ensemble de la population pauvre est donc défini par :

$$\Lambda(\lambda) = \{(x_1, x_2) \,|\lambda(x_1, x_2) \leq 0\} \tag{21}$$

Une mesure de pauvreté bi-dimensionnelle respectant, entre autres, l'axiome de la *décomposabilité par sous-groupe* peut donc être donnée par :

$$P(\lambda) = \int \int_{\Lambda(\lambda)} \pi(x_1, x_2, \lambda) dH(x_1, x_2). \tag{22}$$

où $\pi(x_1, x_2, \lambda)$ est la contribution d'un individu caractérisé par le couple (x_1, x_2) à la pauvreté globale. A partir de l'axiome de *concentration*, cette fonction est :

$$\begin{aligned} \pi(x_1, x_2, \lambda) &\geq 0 \text{ si } \lambda(x_1, x_2) \leq 0 \\ &= 0 \text{ sinon.} \end{aligned} \tag{23}$$

Selon la forme analytique choisie, la fonction $\pi(x_1, x_2, \lambda)$ mesurera la pauvreté à travers l'*intersection* des deux dimensions sélectionnées, l'*union*, ou, encore, à travers toute autre forme intermédiaire.

Pour les besoins de l'analyse de robustesse, Duclos et al. (2006) considèrent l'extension multidimensionnelle suivante de la classe de mesures FGT :

$$P_{\alpha_1,\alpha_2}(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \left(\frac{z_1 - x_1}{z_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{z_2 - x_2}{z_2}\right)^{\alpha_2} dH(x_1, x_2). \tag{24}$$

Cet indice joue un rôle important dans l'analyse de robustesse des comparaisons ordinales, même s'il mesure la pauvreté à travers l'*intersection* des deux dimensions considérées. Les comparaisons de pauvreté seront basées sur l'ordre de dominance $r_1 = \alpha_1 + 1$ dans l'espace x_1 et $r_2 = \alpha_2 + 1$ dans l'espace x_2. $P_{0,0}(X, z)$ est l'incidence bi-dimensionnelle de pauvreté, i.e. le pourcentage de la population pauvre selon les deux attributs simultanément. $P_{1,0}(X, z)$ agrège le déficit de pauvreté de x_1 des individus pauvres au regard du deuxième attribut. $P_{1,1}(X, z)$ agrège le produit des déficits de pauvreté, normalisé par la taille de la population.

Au lieu de sélectionner des seuils et des mesures de pauvreté arbitraires, Duclos et al. (2006) commencent par caractériser une classe de mesures de pauvreté, puis ils précisent les conditions nécessaires pour qu'une distribution A domine une autre B pour toutes les mesures de pauvreté faisant partie de l'ensemble défini. Pour ce faire, ils considèrent, en premier lieu, la classe de mesures suivante :

$$\Pi_{1,1}(\lambda^*) = \left\{ P(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{c} \Lambda(\lambda) \subset \Lambda(\lambda^*) \\ \pi(x, \lambda) = 0 \text{ si } \lambda(x_1, x_2) = 0 \\ \pi^{x_j} \leq 0, \forall x_j \\ \pi^{x_j x_k} \geq 0, \forall x_j, x_k, \end{array} \right\} \tag{25}$$

où π^{x_j} (π^{x_j,x_k}) correspond à la dérivée première (croisée) de la fonction $\pi(x, \lambda)$ par rapport à x_j (x_j et x_k). La première ligne de l'équation (25) définit la limite supérieure des deux seuils de pauvreté. La deuxième indique que les mesures de pauvreté de la classe $\Pi_{1,1}(\lambda^*)$ sont continues le long de la frontière séparant le segment pauvre du segment non pauvre de la population.[20] La troisième ligne impose aux mesures de pauvreté de cette classe la satisfaction de l'axiome de *monotonicité*. Enfin, la quatrième ligne révèle que les mesures de cette classe sont en harmonie avec l'axiome sous-jacent à la *substituabilité* des attributs.[21] Selon le choix de la forme fonctionnelle de $\pi(x, \lambda)$, cette classe peut renfermer des mesures de pauvreté selon l'*intersection* des deux dimensions de pauvreté, l'*union*, ou toute autre situation intermédiaire.

Duclos et al. (2006), démontrent que la pauvreté telle que mesurée par tout indice bi-dimensionnel de la classe $\Pi_{1,1}(\lambda^*)$ diminue, ou au moins elle n'augmente pas, en passant de la distribution A à la distribution B si la condition suivante est observée :

$$\Delta P_{0,0}(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \Lambda(\lambda^*). \tag{26}$$

Autrement dit, la robustesse d'ordre (1,1) exige que le pourcentage de la population pauvre selon les deux attributs simultanément soit plus faible dans la distribution A et ce, pour tout couple possible $(z_1, z_2) \in [0, z_1^*] \times [0, z_2^*]$. Chaque fois que cette condition est respectée, tout indice de pauvreté de la classe $\Pi_{1,1}(\lambda^*)$ indiquera qu'il y a moins de pauvreté dans A que dans B, que cet indice mesure la pauvreté à travers l'*intersection*, l'*union* ou toute autre spécification intermédiaire.

Il est également possible de tester un ordre de dominance plus élevé selon l'un des deux dimensions, tels que l'ordre $(2, 1)$ ou $(1, 2)$, ou selon les deux simultanément, l'ordre $(2, 2)$. Ces tests deviennent particulièrement pertinents dans le cas où la dominance d'ordre $(1, 1)$ révèle des résultats ambigus, i.e. lorsque le signe de $\Delta P_{0,0}(x_1, x_2)$ est sensible aux choix des z_j.

Dès lors, dans la mesure où il est souhaitable que la pauvreté diminue suite à un transfert égalisateur (Daltonien) de x_1, et que cette diminution décroît à mesure que ce transfert profite à des individus bien dotés en x_2, alors la classe de mesures suivante devient appropriée :

$$\Pi_{2,1}(\lambda^*) = \left\{ P(\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{c} P(\lambda) \in \Pi_{1,1}(\lambda^*), \\ \pi^{x_1,x_1} \geq 0, \forall x_1, \\ \pi^{x_1 x_1 x_2} \leq 0, \forall x_1, x_2. \end{array} \right\} \tag{27}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que la pauvreté, tel que mesurée par n'importe quel indice de la classe $\Pi_{2,1}(\lambda^*)$, baisse en passant de la distribution A à la distribution B, est que le déficit de pauvreté enregistré au niveau de x_1 pour

[20]Cela exclut naturellement l'incidence bi-dimensionnelle de la pauvreté.

[21] Contrairement à Bourguignon et Chakravarty (2002), Duclos et al. (2006) rejettent l'axiome sous-jacent à la complémentatrité des attributs.

les individus pauvres selon x_2 soit moins important dans A que dans B et ce, pour tout les choix possibles de $z_j \in [0, z_j^*]$. Analytiquement, la condition de dominance stochastique d'ordre $(2, 1)$ doit être vérifiée :

$$\Delta P_{1,0}(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \Lambda(\lambda^*). \tag{28}$$

Dans le cas où le respect de l'axiome de *transfert* est indiqué, il faut plutôt définir la classe de mesures $\Pi_{2,2}(\lambda^*)$. Celle-ci impose principalement, en plus des conditions de la classe $\Pi_{2,1}(\lambda^*)$, que $\pi^{x_2,x_2} \geq 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que toutes les mesures de pauvreté de la classe $\Pi_{2,2}(\lambda^*)$ révèlent un allégement de la pauvreté en passant de la distribution A à la distribution B est que :

$$\Delta P_{1,1}(x_1, x_2) < 0, \forall (x_1, x_2) \in \Lambda(\lambda^*). \tag{29}$$

D'une manière générale, chaque fois qu'une classe de mesures $\Pi_{r_1,r_2}(\lambda^*)$ est caractérisée, une condition nécessaire est suffisante pour observer la condition de dominance (r_1, r_2) est que la pauvreté, telle que mesurée par la mesure $P_{\alpha_1,\alpha_2}(x_1, x_2)$, diminue indépendamment des choix possibles de z_j.

5 Application

Comme illustration de l'utilisation des indices présentés ci-dessus, nous proposons de comparer la pauvreté multidimensionnelle entre l'Egypte (en 1997) et l'Afrique du Sud (en 1993). Nous concentrons notre analyse sur deux dimensions de bien-être : le revenu individuel, approximé par les dépenses totales par tête, et l'éducation, approximée par le nombre d'année d'études accomplies par un individu adulte. Pour ce faire, nous utilisons les micro-données de deux enquêtes. La première réalisée en 1993 auprès de 9000 ménages sud-africains,[22] et la deuxième enquête réalisée en 1997 auprès de 2451 ménages égyptiens.[23]

Pour chaque individu adulte (âgé de 16 ans et plus),[24] nous lui attribuons les dépenses par tête du ménage auquel il appartient ainsi que le nombre d'années

[22]L'enquête a été réalisée par la Banque Mondiale en collaboration avec le South African Development Research Unit (SALDRU) de l'université de Cape Town. Les données sont librement téléchargeable à partir de : www.worldbank.org/lsms/docs.html

[23]L'enquête égyptienne a été réalisée par l'International Food Policy Research Institute (IFPRI). Les données sont accessible à partir de : www.ifpri.org

[24]Notons que le choix de la limite d'âge adulte n'affecte pas sensiblement les résultats de l'analyse. Nous avons conduit la même analyse en choisissant comme limite d'âge 20 ans et plus et 24 ans et plus mais la qualité des résultats ne change guère.

d'études accomplies. Le seuil de pauvreté monétaire, z_1, a été fixé à 60% de la médiane de la distribution des dépenses par tête dans chacun des deux pays. En Egypte le seuil de pauvreté monétaire est estimé à 2.66 livre égyptien par jour. Pour l'Afrique du Sud le même seuil est estimé à 4.23 Rand par jour. Concernant la dimension éducation nous avons fixé, pour les deux pays, un seuil unique $z_2 = 6$ années d'études qui correspond en fait au cycle d'enseignement primaire. Ces seuils de pauvreté de *référence* sont utilisés pour les classements *complets* de pauvreté. Par contre, pour les classements *partiels,* nous tenons compte de tout l'intervalle de variation des deux attributs considérés. Etant donné que tous les indices utilisés pour l'illustration empirique respectent le principe d'*invariance aux variations d'échelle* résumé par l'équation (6), les distributions de revenu et du nombre d'années d'étude ont été normalisées de sorte que $x_{i,j}$ soit égal à 100 chaque fois que $x_{i,j}$ correspond au seuil de pauvreté de *référence* pertinent aussi bien en Afrique du Sud qu'en Egypte.

Le tableau 1 rapporte les estimations des incidences de la pauvreté unidimensionnelles à travers chacun des deux attributs ainsi que leurs écarts types respectifs. L'adoption d'une optique unidimensionnelle dans les comparaisons de pauvreté mène à des résultats qui rendent mitigé le classement ordinal de ces deux pays. En effet, l'Afrique du Sud présente une incidence de pauvreté monétaire largement plus importante que celle de l'Egypte. Par contre, sur le plan éducatif, le pourcentage des sud-africains n'ayant pas achevé le cycle d'enseignement primaire n'est que légèrement plus important que celui des égyptiens. A priori, ces résultats doivent nous conduire à affirmer que l'Afrique du Sud présente un niveau de pauvreté bi-dimensionnelle plus important que celui prévalant en Egypte.[25]

Toutefois, il est toujours indiqué de vérifier les résultats d'analyse à l'aide d'au moins deux mesures de pauvreté, surtout que l'incidence de la pauvreté ne respecte pas l'axiome de *monotonicité*. Pour cela, le tableau 1 reporte également des comparaisons unidimensionnelles basées sur le calcul des déficits de pauvreté normalisés. Force est de constater que les résultats sont dans ce cas vraiment contradictoires, interdisant un classement ordinal cohérent des deux pays étudiés. En effet, pendant que ces résultats confirment que la pauvreté monétaire est plus présente en Afrique du Sud, les sud-africains n'ayant pas achevé le cycle d'enseignement primaire ont à leur actif plus d'années d'étude que leurs homologues égyptiens. Le classement ordinal de ces deux pays en termes de pauvreté globale risque donc de dépendre, de façon critique, de la pondération associée à chacun

[25]Il faut, cependant, garder à l'esprit que les données utilisées sont collectées à deux dates différentes.

des deux attributs sélectionnés.

Le graphique 1 confirme d'ailleurs la difficulté de procéder à un classement ordinal robuste basé uniquement sur des mesures unidimensionnelles. Ce graphique montre que le signe de $\Delta P(x_j)$, tel que défini par l'équation (17), change en fonction de z_j. La condition principale de robustesse d'ordre 1, telle que définie par Bourguignon et Chakravarty (2002), n'est donc pas respectée.[26] En effet, pour des seuils de pauvreté relativement faibles, i.e. variant de 0 à 100% des seuils de pauvreté de *référence*, l'incidence de la pauvreté monétaire est plus faible en Egypte pendant que le pourcentage des adultes analphabètes ou ayant un très faible niveau scolaire est plus faible en Afrique du Sud. Un résultat tout à fait opposé s'observe, néanmoins, dès que les seuils de pauvreté soient fixés à des niveaux dépassant les 150% des seuils de *référence*. Les deux dimensions considérées ne classent de la même façon l'Afrique du Sud et l'Egypte que pour des seuils de pauvreté allant de 100 à 150% des seuils de pauvreté de *référence*.

Etant donné l'impossibilité d'obtenir un classement ordinal robuste de l'Afrique du Sud et de l'Egypte en utilisant simplement des mesures de pauvreté unidimensionnelles, nous utilisons maintenant les différents indices bi-dimensionnels discutés plus-haut avant de tester d'autres conditions de dominance. A cet effet, le tableau 2 révèle encore des résultats contradictoires. D'un côté, les mesures de pauvreté qui violent même l'axiome de *monotonicité*, comme l'incidence bi-dimensionnelle mesurée à travers l'*intersection* ou l'*union* des deux dimensions considérées, indiquent que la pauvreté globale est plus élevée en Egypte qu'en Afrique du Sud. De l'autre côté, les mesures de pauvreté qui respectent soit l'axiome de *monotonicité*, comme la mesure de Chakravarty et al. (1998) pour $\alpha_j = 1$, soit au moins l'axiome de *monotonicité* et de *transfert* simultanément, comme toutes les autres mesures reportées au tableau 2 à l'exception de l'*IPH*, indiquent au contraire que la pauvreté bi-dimensionnelle est plus présente en Egypte et ce, que l'éducation et le revenu soient considérés comme des attributs *substituables* ou *complémentaires*. L'*indice de pauvreté humaine* indique également le même classement ordinal ; même s'il est mesuré par rapport à d'autres attributs agrégés de façon complètement différente.

Il va sans dire que les résultats exposés au tableau 2 peuvent être inversés suite à des choix alternatifs de seuils ou d'indices bi-dimensionnels de pauvreté. Il est donc plus indiqué de vérifier dans quelle mesure des comparaisons ordinales entre l'Egypte et l'Afrique du Sud peuvent être effectuées là où les jugements

[26] Nous rappelons que cette condition, décrite par l'équation (17), est nécessaire que les attributs soient considérés *substituables* ou *complémentaires*.

de valeur différent ; aussi bien niveau du choix des seuils de pauvreté, que de la procédure d'agrégation des deux dimensions de bien-être retenues. Comme il a été précisé à la section 4.2, l'approche de la dominance stochastique permet de répondre à ce besoin. Elle commence par caractériser une classe de mesures de pauvreté. Elle fournit, ensuite, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une distribution domine une autre pour tous choix de seuils et de mesures de pauvreté faisant partie de la classe définie. Pour les mesures de pauvreté faisant partie de la classe $\Pi_{1,1}(\lambda^*)$, le graphique 2 montre que $\Delta P_{0,0}(x_1, x_2)$ change de signe en fonction du choix de (z_1, z_2). La condition de robustesse d'ordre (1, 1) n'est donc pas respectée. Autrement dit, pour toutes les mesures de pauvreté respectant les propriétés minimales décrites par l'équation (25), le classement ordinal de l'Egypte et de l'Afrique du Sud dépendra, de façon critique, du choix des z_j. Face à ce problème, deux alternatives sont offertes. La première consiste à réduire l'intervalle de variation des z_j. la seconde consiste à imposer plus de structures aux mesures de pauvreté admissibles pour les comparaisons de pauvreté.

La poursuite de la première alternative permet effectivement d'obtenir un classement ordinal cohérent. En effet, le graphique 2 montre que pour des seuils de pauvreté monétaires qui varient de 0 à 90% du seuil de pauvreté monétaire de *référence* fixé pour chacun des deux pays, il est autorisé d'affirmer que la pauvreté globale est plus prépondérante en Afrique du Sud et ce, indépendamment du choix du seuil de pauvreté du deuxième attribut. Par contre, s'il n'est pas possible de réunir un consensus autour de cet intervalle de variation des seuils de pauvreté monétaires, il faut alors tester des conditions de robustesse plus fortes, telles que par exemple l'ordre (2, 1) ou l'ordre (1, 2).

Dès lors, si nous admettons que la pauvreté doit diminuer suite à un transfert égalisateur de revenu, et que cette diminution s'affaiblit à mesure que ce transfert cible les individus les plus éduqués, alors les comparaisons entre l'Egypte et l'Afrique du Sud peuvent se limiter aux mesures de la classe $\Pi_{2,1}(\lambda^*)$. Encore une fois, le graphique 3 rejette la possibilité d'un classement cohérent de ces deux pays pour tous les choix possible de z_j. Par contre, ce même graphique montre que si nous limitons l'intervalle de variation du seuil de pauvreté monétaire à une limite supérieure égale à 130% des seuils de pauvreté monétaires de *référence*, alors nous pouvons conclure que la pauvreté globale est plus faible en Egypte. Nous pouvons également noter que cette limite est moins contraignante que celle imposée par l'ordre (1, 1). De façon générale, plus nous imposons de structure à la dimension monétaire du bien-être, en passant par exemple à l'ordre (3, 1) ou plus, plus la contrainte sur limite supérieure des seuils de pauvreté monétaires admissibles s'affaiblit. Par contre, cette limite se rétrécie à mesure que nous imposions plutôt plus de structure à la dimension éducation du bien-être. A titre d'exemple, le graphique 3 montre que pour l'ordre de dominance (1,2), la limite supérieure du seuil de pauvreté monétaire pour laquelle nous pouvons accepter l'hypothèse que la pauvreté soit moins importante en Egypte ne dépasse pas les 70% des seuils de pauvreté monétaires de *référence*.

6 Conclusion

La littérature économique axée sur les comparaisons ordinales de pauvreté a pendant longtemps fait usage d'une seule dimension du bien-être. Néanmoins, il va de soi que le succès des politiques de lutte contre la privation dans ses multiples aspects exige une compréhension adéquate de cette dernière. La présente étude offre une synthèse des deux principales approches permettant un classement *complet* et *partiel* des distributions de bien-être. Les mesures de pauvreté fournissent un classement *complet* dans la mesure où elles permettent de comparer toute paire de distributions. L'analyse de robustesse permet, quant à elle, un classement *partiel* de ces distributions dès lors qu'elle délimite l'intervalle de variation des seuils de pauvreté et les familles de mesures de pauvreté à l'intérieur desquelles cette comparaison demeure acceptable.

Une illustration empirique est proposée en utilisant des micro-données en provenance de l'Afrique du Sud et de l'Egypte. Nous avons considéré le cas où la pauvreté est mesurée à travers deux dimensions, le revenu et l'éducation. Les principaux résultats sont : Pour des seuils de pauvreté modérés, la pauvreté monétaire est plus importante en Afrique du Sud mais la pauvreté en termes de nombre d'années d'étude est plus élevé en Egypte. Cette conclusion rend difficile d'établir un classement ordinal cohérent des deux pays en termes de pauvreté globale. Le recours à la théorie de dominance stochastique a confirmé cette difficulté. Il n'en demeure pas moins qu'un classement cohérent peut être obtenu si on accepte certaine limitation au niveau du choix des seuils de pauvreté et des modes d'agrégation des différentes dimensions de bien-être.

Il est largement admis que rien que le combat contre la dimension monétaire de la pauvreté est loin d'être une tâche facile. Les nouvelles approches faisant appel aussi à des dimensions non-monétaires de la pauvreté peuvent donc nous amener à croire que la lutte contre la pauvreté risque de devenir encore plus compliquée. En effet, le cadre analytique des comparaisons multivariées de la pauvreté n'est pas aussi développé que celui axé uniquement sur la pauvreté unidimensionnelle. Des nouvelles difficultés, inhérentes à la multiplication des dimensions de bien-être considérées, rend donc plus difficile l'obtention de résultats qui recueillent une large approbation, une difficulté à laquelle nous avons fait face lors de l'application empirique de ce papier. En dépit de ces difficultés, l'analyse bidimensionnelle de pauvreté a permis une meilleure caractérisation de ce fléau et devrait, au contraire, améliorer l'efficacité des politiques de lutte contre la pauvreté.

Références

[1] Arnand, S. et A. K. Sen (1997), Concepts of Human Development and Poverty : A Multidimensional Perspective. *Human Development Papers*, Programme des Nations Unies por le Développement (PNUD), New York.

[2] Atkinson, A. B. (1987), On the Measurement of Poverty. *Econometrica*, vol. 55 (4), pp. 749-764.

[3] Atkinson, A. B. (2003), Multidimensional Deprivation : Contrasting Social Welfare and Counting Approaches. *Journal of Economic Inequality*, vol. 1, pp. 51-65.

[4] Atkinson, A. B. et F. Bouguignon, (1982), The comparaison of Multidimensioned Distributions of Economic Status. *Review of Economic Studies*, vol. 49, 183-201.

[5] Bibi, S. (2005), Measuring Poverty in a Multidimensional Perspective : A Review of Literature. *Cahier de Recherche PMMA-2005-07*, réseau politique économique et pauvreté, Université Laval, Québec, Canada.

[6] Bibi, S. et Duclos, J.-Y. (2006), Equity and policy effectiveness with imperfect targeting. *Journal of Development Economics*, à paraitre

[7] Blackorby, C. et D. Donaldson (1980), Ethical Indices for the Measurement of Poverty. *Econemetrica*, vol. 48, pp. 1053-1060.

[8] Bourguignon, F. et S.R. Chakravarty, (2002), Multidimensional Poverty Orderings. *DELTA*, Paris.

[9] Bourguignon, F. et S.R. Chakravarty, (2003), The Measurement of Multidimensional Poverty. *Journal of Economic Inequality*, vol. 1 (1), pp. 25-49.

[10] Chakravarty, S.R. (1983), A New Index of Poverty. *Mathematical Social Science*, vol. 6, pp. 307-313.

[11] Chakravarty, S.R., D. Mukherjee, et R. Ranade (1998), On the Family of Subgroup and Factor Decomposable Measures of Multidimensional Poverty. *Research on Economic Inequality*. vol. 8, pp. 175-194.

[12] Collicelli, C. et M. Valerii, (2001), Poverty in Transformation : Definition Indicators, and Key Players at the National and Mediterranean Level. *Euro-Mediterranean Forum of Economic Institutes*, Marseille, France.

[13] Duclos, J.-Y., D. Sahn, et S. D. Younger (2006), Making Multidimensional Poverty Comparisons. A paraître dans *The Economic Journal*.

[14] Dutta, I., P. K. Pattanaiket., et Y. Xu (2003), On Measuring Deprivation and the Standard of Living in a Multidimensional Framework on the Basis of Aggregate Data. *Economica*, vol.70, pp.197-221

[15] Foster, J. E., J. Greer et E. Thorbecke. (1984), A Class of Decomposable Poverty Measures. *Econometrica*, vol. 52 (3), pp. 761-765.

[16] Foster, J. E. et A. Shorroks, (1988), Poverty Orderings. *Econometrica*, vol. 56, pp. 173-177.

[17] Foster, J. E. et A. Shorroks, (1991), Subgroup Consistent Poverty Indices. *Econometrica*, vol. 59, pp. 687-709.

[18] Jenkins, S. P. et P. J. Lambert. (1997), Three 'i' s of Poverty Curves, with an analysis of UK Poverty Trends. *Oxford Economic Papers*, vol. 49, pp. 317-327.

[19] Klassen, S. (2000), Measuring Poverty And Deprivation In South Africa. *Review of Income and Wealth*, vol. 46(1), pp. 33-58.

[20] Kolm, S. C. (1979), Multidimensional Egalitarism. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 91, pp. 1-13.

[21] PNUD (1997), *Human Development Report*, Chap. 1, pp. 15-21 et 117-121.

[22] Sen, A. K. (1976), Poverty : An Ordinal Approach to Measurement. *Econometrica*, vol. 44 (2), pp. 219-231.

[23] Sen, A.K. (1985), *Commodities and Capabilities*. North-Holland, Amsterdam.

[24] Sen, A. K. (1992), *Inequality Reexamined*. Cambridge, MA : Havard University Press.

[25] Silber, J. (2005), Measuring Multidimensional Poverty : An Empirical Comparison Of Various Approaches *Review of Income and Wealth*, vol. 51(1), pp. 145-174.

[26] Streeten, P. (1981), *First things first, Meeting basic needs in developing countries.* World Bank publication, Washington, Oxford University Press.

[27] Thon, D. (1983), A poverty Measure" *Indian Economic Journal*, vol. 30, pp. 55-70.

[28] Tsui, K. (2002), Multidimensional Poverty Indices. *Social Choice and Welfare*, vol. 19, pp. 69-93.

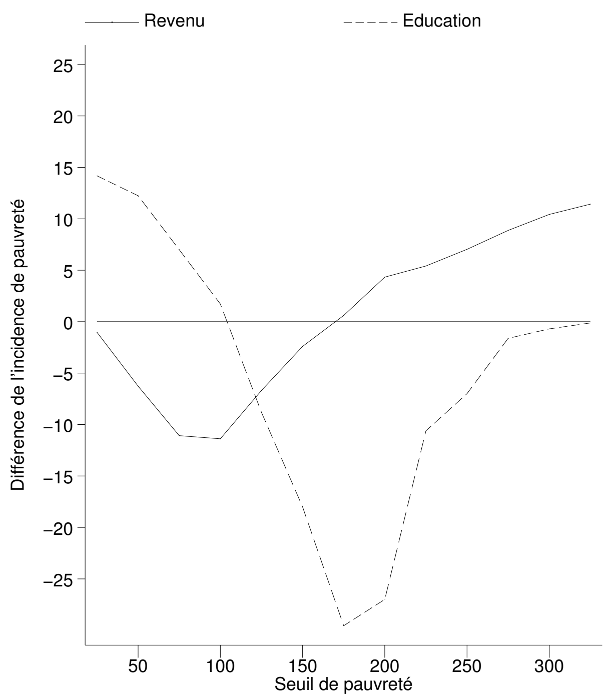
[29] Watts, H. (1968), An Economic Definition of Poverty. Dans *On Understanding Poverty*. Edité par D. P. Moynihan, New York : Basic Books.

[30] Zheng, B. (1997), Aggregate Poverty Measures, Journal of Economic Surveys, vol. 11 (2), pp. 123-162.

TAB. 1 – Mesures unidimensionnelles de la Pauvreté

	Dimension Monetaire		**Dimension Education**	
	Incidence	*Déficit*	*Incidence*	*Déficit*
Egypte	.179	.043	.541	.386
	(.004)	(.001)	(.005)	(.005)
Afrique Sud	.293	.105	.562	.282
	(.002)	(.001)	(.003)	(.002)

FIG. 1 – Robustesse unidimensionnelle d'ordre 1 : Revenu vs Education Egypte - Afrique du Sud



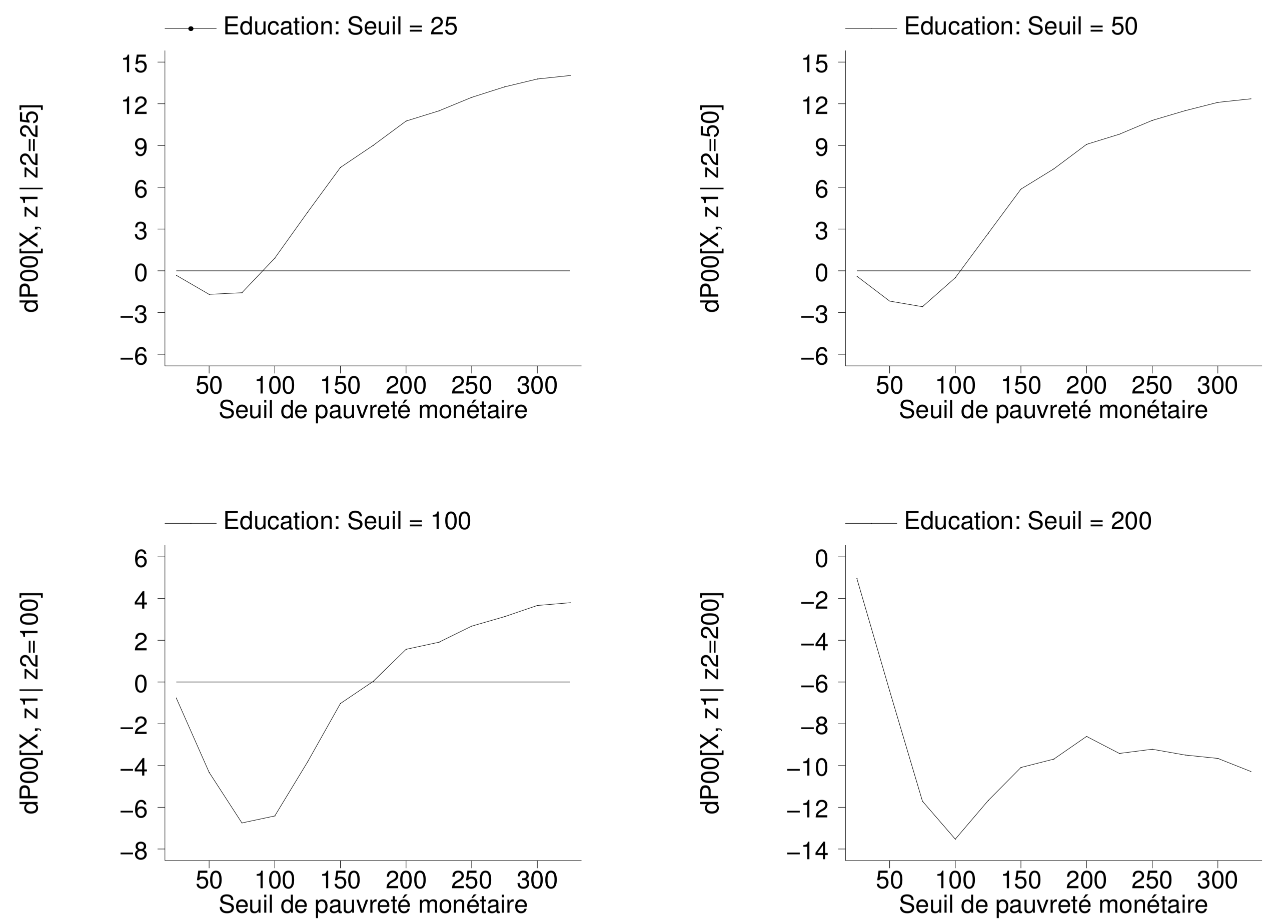
N.B. Une valeur positive de $\Delta P(x_j)$, telle que définie par l'équation (17), signifie que la pauvreté bi-dimensionnelle en Egypte est supérieure à celle qui prévaut en Afrique du Sud.

TAB. 2 – Comparaisons de la pauvreté Bi-dimensionnelle

	Egypte	Afrique du Sud	$\Delta P(X, z)$
Incidence de pauvreté selon l'*intersection*	13.7	22.3	-8.6
Incidence de pauvreté selon l'*union*	58.4	63.2	-4.8
Chakravarty et al. (1998), $\alpha_j = 1$	42.93	38.74	4.19
Chakravarty et al. (1998), $\alpha_j = 2$	37.38	27.67	9.71
Watts (1968)	174.53	110.08	64.45
Tsui (2002), $\beta_j = 1$	4591.91	2693.93	1897.98
$P_{\alpha,\gamma}(X, z), \alpha = 3, \gamma = 2$, (Substituables)	36.3	25.03	11.27
$P_{\alpha,\gamma}(X, z), \alpha = 3, \gamma = 4$, (Complémentaires)	34.81	22.14	12.67
$P_{\alpha,\gamma}(X, z), \alpha = 3, \gamma = \infty$, (Leontief)	34.59	21.47	13.12
Indice de Pauvreté Humaine (*IPH*) en 1998	32.3 (55)	20.2 (33)	12.1

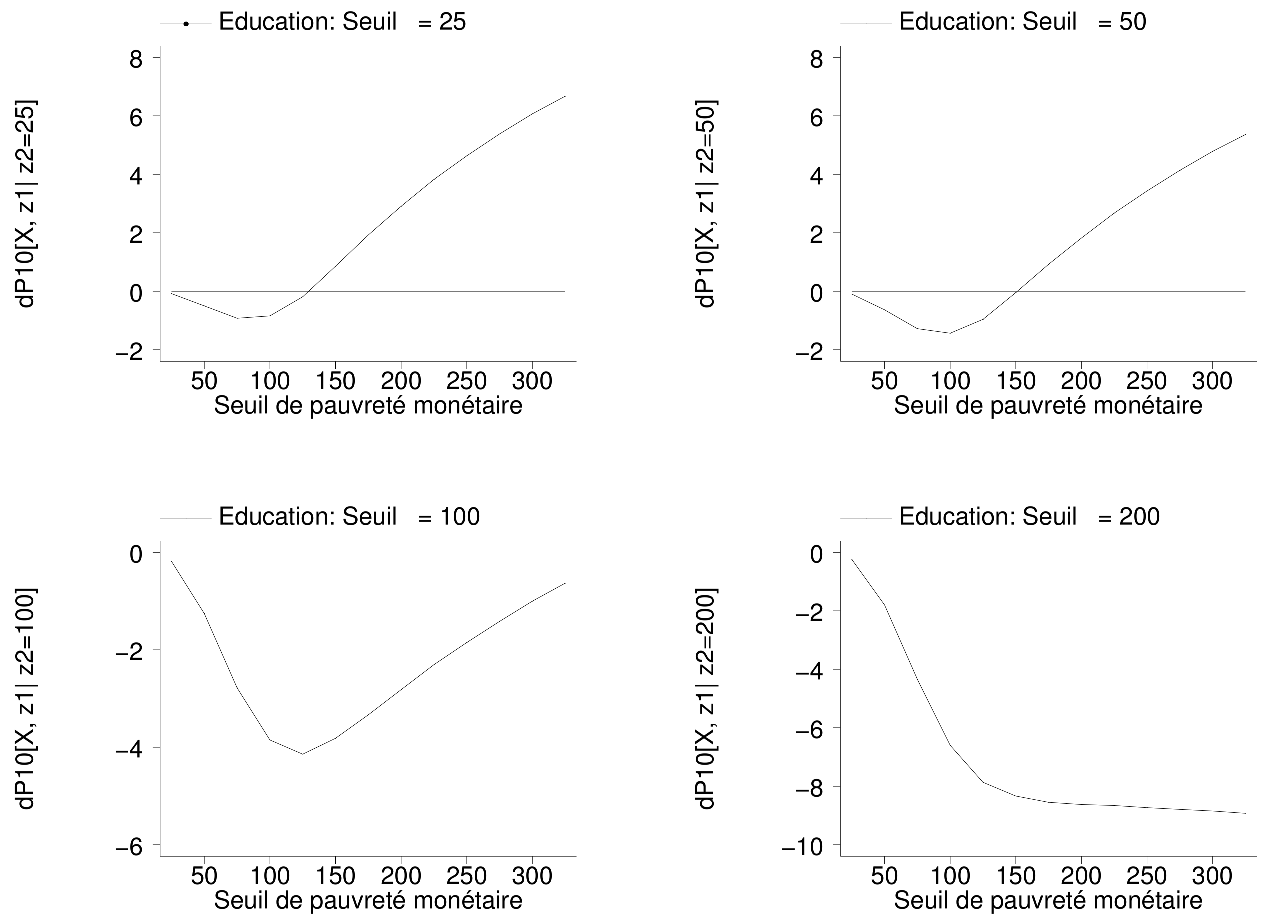
N.B. Une valeur positive de $\Delta P(X, z)$ signifie que la pauvreté multidimensionnelle en Egypte est supérieure à celle qui prévaut en Afrique du Sud.
Pour les indices additifs de pauvreté, le même poids $a_j = 1$ est donné aux deux attributs.
Les chiffres entre parenthèses indique le rang mondiale du pays en terme de l'*IPH*.

FIG. 2 – Robustesse bi-dimensionnelle d'ordre (1,1) : Egypte - Afrique du Sud



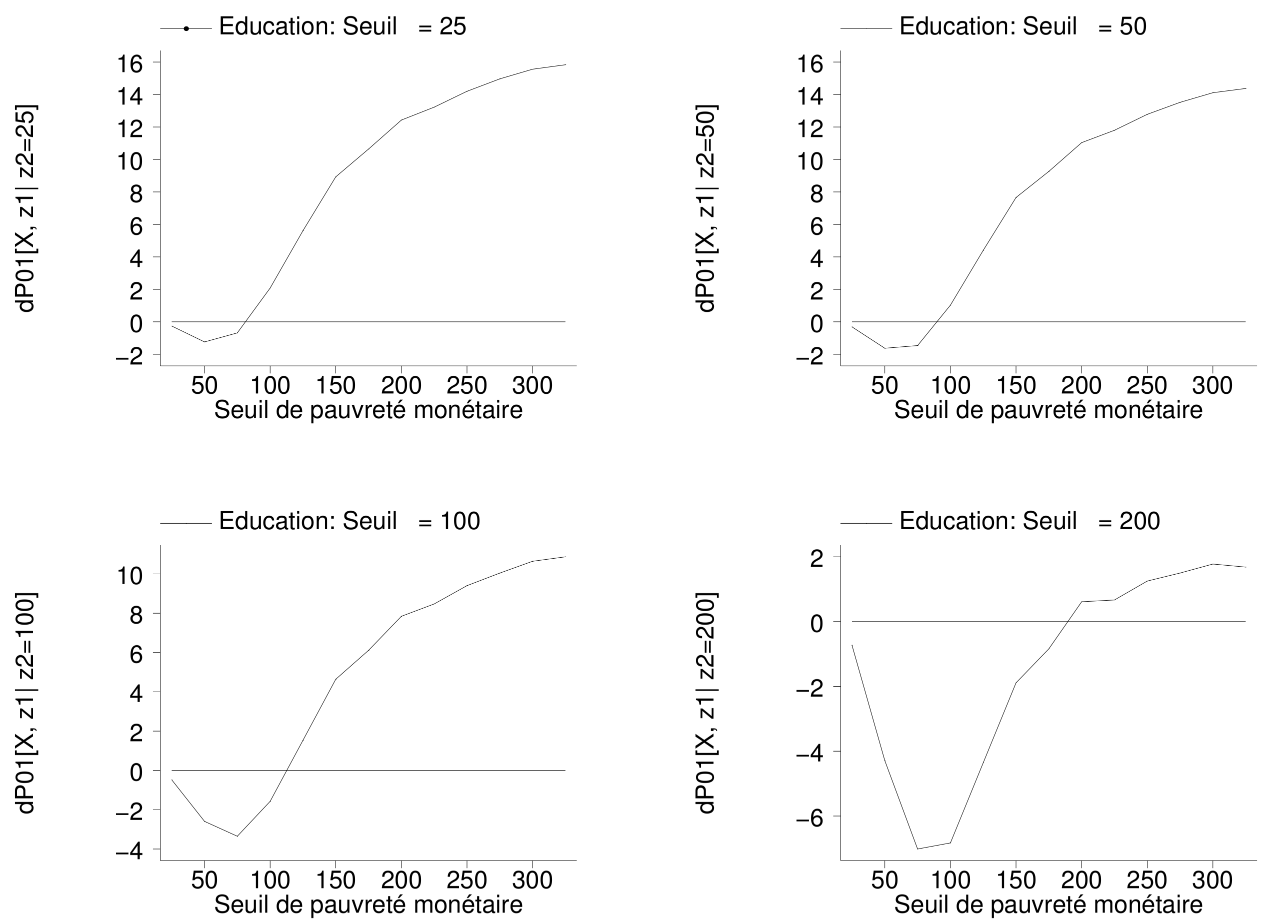
N.B. Une valeur positive de $\Delta P_{0,0}(x_1, x_2)$, telle que définie par l'équation (26), signifie que la pauvreté bi-dimensionnelle en Egypte est supérieure à celle qui prévaut en Afrique du Sud.

FIG. 3 – Robustesse bi-dimensionnelle d'ordre (2,1) : Egypte - Afrique du Sud



N.B. Une valeur positive de $\Delta P_{1,0}(x_1, x_2)$, telle que définie par l'équation (28), signifie que la pauvreté bi-dimensionnelle en Egypte est supérieure à celle qui prévaut en Afrique du Sud.

FIG. 4 – Robustesse bi-dimensionnelle d’ordre (1,2) : Egypte - Afrique du Sud



N.B. Une valeur positive de $\Delta P_{0,1}(x_1, x_2)$ signifie que la pauvreté bi-dimensionnelle en Egypte est supérieure à celle qui prévaut en Afrique du Sud.